Durée : 3 heures
Coefficient : 9

Le but de ce problème est la recherche des matrices carrées d'ordre 2 et 3 orthogonales à coefficients rationnels.

On désigne par $M_n(\mathbb{R})$ (respectivement $M_n(\mathbb{Q})$) l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels (respectivement rationnels), et par $O_n(\mathbb{R})$ (respectivement $O_n(\mathbb{Q})$) celui des matrices carrées d'ordre n orthogonales à coefficients réels (respectivement rationnels).

- QUESTION I -

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, $A \in O_2(\mathbb{R})$.

1°) $A \in O_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = c^2+d^2 = 1 \\ ac+bd = 0 \end{cases}$ (S).

(S) est-il équivalent à $\begin{cases} a^2+c^2 = b^2+d^2 = 1 \\ ab+cd = 0 \end{cases}$?

2°) Démontrer que

$$A \in O_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists \varphi \in [0, 2\pi[\text{ tel que } A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Quelles sont les significations géométriques respectives des 2 endomorphismes associés ?

3°) Démontrer que si $A \in O_2(\mathbb{R})$,

$$\text{il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } A = \begin{pmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{-2t}{1+t^2} \\ \frac{2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{2t}{1+t^2} & \frac{-(1-t^2)}{1+t^2} \end{pmatrix}.$$

On admettra que t puisse prendre des valeurs infinies.

Montrer que $A \in O_2(\mathbb{Q}) \Leftrightarrow t \in \mathbb{Q}$.

- QUESTION II -

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$. On suppose désormais que $A \in O_3(\mathbb{R})$.

1°) Quelles sont les valeurs possibles de det A ?

2°) On suppose que det A = +1. **a -** Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ valeur propre de A.
Que peut-on dire de λ ?

b - Montrer que $\lambda = 1$ est valeur propre d'ordre 1 ou 3.

c - On appelle E_1 l'espace propre associé à $\lambda = 1$.
Montrer que dim $E_1 = 1$ ou dim $E_1 = 3$.

d - Dans le cas dim $E_1 = 1$, montrer que A est semblable à $A' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Quelle est la signification géométrique de l'endomorphisme associé à A' ?
Pour calculer φ, déterminer la trace de A et $\dfrac{\det_{\mathscr{B}}(\vec{u}, f(\vec{u}), \vec{n})}{\|\vec{u}\|.\|\vec{n}\|}$ où f est l'endomorphisme associé à A, $\mathscr{B}$ la base canonique de E_3, $\vec{u}$ un vecteur appartenant à $E_1^{\perp}$ et $\vec{n}$ un vecteur de E_1.

3°) Déduire de l'étude précédente des résultats analogues pour le cas det A = −1.

Montrer que dans ce cas, A est semblable à la matrice $A' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Quelle interprétation géométrique peut-on en donner ?

4°) Application numérique.
Caractériser les endomorphismes définis par

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -1 & -4 \\ -1 & 8 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix} \text{ et } B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

- QUESTION III -

Soit E_4 un espace vectoriel de dimension 4 rapporté à la base orthonormale $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ supposée directe. On note E_4^*, l'espace vectoriel E_4 privé du vecteur nul.
Soient $E_1 = \text{Vect}(e_1)$ et $F = \text{Vect}(e_2, e_3, e_4)$.
Soit $p \in E_4^*$: $p = a e_1 + b e_2 + c e_3 + d e_4$.

On définit les endomorphismes f_p et g_p par leurs matrices associées A_p et B_p dans la base $\mathscr{B}$: $A_p = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$ et $B_p = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$.

1°)

a - Calculer $A_p \times {}^tA_p$ et $B_p \times {}^tB_p$.

b - Trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que λA_p et $\lambda B_p \in O_4(\mathbb{R})$ et $\det(\lambda A_p) = \det(\lambda B_p) = 1$.

Déterminer alors A_p^{-1} et B_p^{-1}.

c - Montrer que $\left\{f_p, o, p \in E_4^*\right\}$, ensemble des f_p muni de la loi de composition, est un sous-groupe du groupe des automorphismes de E_4.

Même question pour $\left\{g_p, o, p \in E_4^*\right\}$

d - Déterminer p pour que $f_p = g_p$.

2°) Soit $p \notin E_1$ et $p \neq 0$.

a - Montrer que $g_p^{-1} o f_p$ est une isométrie de E_4 laissant invariant E_1 et F.

b - Soit h_p la restriction de $g_p^{-1} o f_p$ à F.

Déduire de l'étude du noyau de $g_p - f_p$ un vecteur propre de h_p et la valeur propre associée.

3°) Montrer que h_p est une rotation vectorielle de F dont on déterminera un axe et un angle associé à cet axe.

4°) Montrer que pour toute rotation vectorielle φ de F, il existe un élément non nul p de E_4 tel que $\varphi = h_p$.

5°) En déduire que si $A \in O_3(\mathbb{R})$, $\exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$A = \frac{\pm 1}{a^2+b^2+c^2+d^2} \begin{pmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & 2bc-2ad & 2bd+2ac \\ 2bc+2ad & a^2-b^2+c^2-d^2 & 2cd-2ab \\ 2db-2ac & 2cd+2ab & a^2-b^2-c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

avec $a^2+b^2+c^2+d^2 \neq 0$.

6°) Montrer que si $A \in O_3(\mathbb{Q})$, les rapports deux à deux de a,b,c,d sont rationnels et que

$$A = \frac{\pm 1}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2} \begin{pmatrix} 1+\lambda^2-\mu^2-\nu^2 & 2(\lambda\mu-\nu) & 2(\lambda\nu+\mu) \\ 2(\lambda\mu+\nu) & 1-\lambda^2+\mu^2-\nu^2 & 2(\mu\nu-\lambda) \\ 2(\lambda\nu-\mu) & 2(\mu\nu+\lambda) & 1-\lambda^2-\mu^2+\nu^2 \end{pmatrix}$$

avec $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\mu \in \mathbb{Q}$, $\nu \in \mathbb{Q}$.